

DEVOIR DE CONTROLE N° 2

Durée 2 h

EXERCICE N°1 : (4 pts)

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse.

- 1) Une similitude directe qui fixe deux points distincts du plan est l'identité.
- 2) Si $f = S_A \circ S_d (A, 3, \frac{\pi}{2})$ alors $f = S_d (A, 3, -\frac{\pi}{2})$.
- 3) Si $f = h (A, -2) \circ R (A, \frac{\pi}{3})$ alors $f = S_d (A, 2, -\frac{2\pi}{3})$.
- 4) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f une application du plan dans lui-même d'écriture complexe $z' = (1+i) \bar{z} - 2i$ et g d'écriture complexe $z' = \frac{1-i}{2} z - 5$.

Alors $f \circ g$ est une symétrie glissante .

EXERCICE N° 2 : (5 pts)

On a représenté ci-dessous deux courbes représentatives (C_1) et (C_2) d'une fonction f et d'une primitive de f définies sur \mathbb{R} .

- 1) Justifier que (C_2) est celle de la fonction f .
- 2) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 , 1]$.
- 3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_2) l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = 0$ et $x = 2$.
- 4) Soit la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- a) Etudier le sens de variation de G.
- b) Montrer que la représentation graphique Γ de G est l'image de (C_1) par la translation de vecteur $-2\vec{j}$.

EXERCICE N° 3 : (5 pts)

Dans le plan orienté dans le sens direct on considère un carré ABCD de c entre O tel que

$$(\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [IO].}$$

Soit S la similitude directe qui transforme A en I et Den A.

- 1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
 - b) Quelle est l'image du carré DABC par S ?
 - c) Déterminer S(B) et en déduire que S(I) = J.
- 2) Soit Ω le centre de S. On pose $g = SoS$.
 - a) Montrer que g est une homothétie dont on déterminera le rapport.
 - b) Déterminer g(A) et g(D).
 - c) Construire alors Ω .

EXERCICE N° 4 : (6 pts)

On pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx$ pour tout $n \geq 0$.

- 1) a) Calculer I_0 .
 - b) Calculer I_1 .
- 2) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
- 3) a) Montrer que pour tout n appartenant à \mathbb{N} , on a : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.
 - b) En déduire la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.
- 4) a) Démontrer que pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ on a :

$$0 \leq 2 - \sqrt{3+x} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}(1-x)$$

b) Calculer $\int_0^1 (1-x)x^n dx$.

c) En déduire que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$.

d) Déterminer la limite de la suite (nI_n) $n \in \mathbb{N}$.

